

体積積分の考え方：

先ず、体積を表現する定積分の式を立てる。

対象領域を図形としてイメージし、それを適当な軸(z 軸とする)に直交する平面でスライスするように考えるとよい。(もちろん、座標系の選び方は、計算が簡単になるように工夫すべきである。)

その各スライス断面の面積を z の関数 $S(z)$ として表現できたならば、それを定積分した以下の式が体積を与えることが納得できるだろう。

[立体の体積]

$$V = \int_{z_{\text{下端}}}^{z_{\text{上端}}} S(z) dz$$

面積 $S(z)$ は、一般には、各スライス面内の x - y に関する定積分で表現される。

[スライス断面積]

$$S(z) = \int_{z \text{で決まる } y \text{ の下端}}^{z \text{で決まる } y \text{ の上端}} L(y) dy$$

上式で y に対して積分される $L(y)$ は、各スライス断面を、 y 軸方向にスキャンしながら y 軸に垂直な x 軸方向に沿う線分に切り分け、その長さを表す関数である。

これについても、次のような定積分と見なすことができる。

[千切り線分長]

$$\begin{aligned} L(y) &= x_{\max}(y) - x_{\min}(y) \\ &= \int_{z \text{と } y \text{ で決まる } x \text{ の下端}}^{z \text{と } y \text{ で決まる } x \text{ の上端}} 1 dx \end{aligned}$$

上段の $x(y)$ は、線分の端を与える関数(媒介変数としての z が含まれる)であるが、これを 1 の定積分の区間と見なすわけである。

以上をまとめれば、

$$V = \int_{z_{\text{下端}}}^{z_{\text{上端}}} \left\{ \int_{z \text{で決まる } y \text{ の下端}}^{z \text{で決まる } y \text{ の上端}} \left(\int_{z \text{と } y \text{ で決まる } x \text{ の下端}}^{z \text{と } y \text{ で決まる } x \text{ の上端}} 1 dx \right) dy \right\} dz$$

となり、この右辺の定積分(三重積分)を $\iiint_V 1 dx dy dz$ のように表す。

この被積分値 1 を、(x, y, z の関数として定まる)任意の式においた場合が、一般の体積積分である。その積分区間を考えるとときには、常に、上のように目的の領域の体積を表現する式を念頭に置くことになる。