

練習コーナー 1. (10月26日実施)

質量 m と $2m$ をもつ2つの小球 A と B が、相互の強力な引力を受けながら運動する。(他の力は作用しない。)これらについて、ある慣性系と時刻の基準を用いて、時刻 $t = 0$ における初期条件が以下のように表されたとする。

$$\text{A の位置: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ B の位置: } \begin{pmatrix} 15 \text{ cm} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{A の速度: } \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \text{ cm s}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ B の速度: } \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \text{ cm s}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

全運動量と、原点のまわりの全角運動量を算出し、それらがどのように時間変化するかを述べよ。

~~~~~

〔全角運動量に関する部分の解答例〕

質量  $M$  の質点が、位置  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  にあって、速度  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$  を示すとき、その原点のまわりの角運動

量は  $\mathbf{L} = M\mathbf{r} \times \mathbf{v} = M \begin{pmatrix} yv_z - zv_y \\ zv_x - xv_z \\ xv_y - yv_x \end{pmatrix}$  で与えられる。

そこで、この問題における  $t=0$  の瞬間の A と B それぞれの角運動量を算出する。  
A については、 $\mathbf{r}_A = \mathbf{0}$  より直ちに  $\mathbf{L}_A(0) = \mathbf{0}$  (ゼロベクトル) であることが分かる。  
一方、B については、

$$\mathbf{r}_B = (15 \text{ cm}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_B = (10 \text{ cm s}^{-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから、以下のように求められる。

$$\mathbf{L}_B(0) = 2m(15 \text{ cm})(10 \text{ cm s}^{-1}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (300 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}) m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって、時刻  $t=0$  における全角運動量は以下となる。

$$\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}_A(0) + \mathbf{L}_B(0) = (300 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}) m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

AB は相互の力だけを受ける孤立 2 体系だから、全角運動量ベクトルが保存する。したがって、上に求めた  $t=0$  のときの全角運動量の値は、他の時刻においても変わることはない。(  $\mathbf{L}_A$  と  $\mathbf{L}_B$  のそれぞれは時間とともに変化する。)

なお、 $\text{cm} = 10^{-2} \text{ m}$  なので、上の角運動量を SI 単位 (MKS 系) で表すならば、以下となる。

$$\mathbf{L} = (0.03 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}) m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$