

【(a)～(c)の略解】

$$(a) \quad \mathbf{f}_1 = -k(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{f}_2 = k(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

(b) 2体の相互作用が定義できるならば $\mathbf{f}_1 = -\frac{d}{dD}U(D)\hat{\mathbf{D}}$ が成立する。

これを満たすような U を探す。

$$k(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \left\{ \frac{d}{dD}U(D) \right\} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{D}$$

$$\therefore kD(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{dU(D)}{dD}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

つまり、 $\frac{dU(D)}{dD} = kD$ であればよく、これを満たす原始関数の一つは以下であることがすぐ分かる。

$$U(D) = \frac{1}{2}kD^2 \quad \left(\because \frac{dU}{dD} = kD \right)$$

この U の $\mathbf{r}_1$ に対する勾配を求める。その際、授業の中で一般的に導出した以下の関係を使う。

$$-\text{grad}_1 U(D) = -\frac{dU}{dD} \hat{\mathbf{D}}$$

右辺の微分に、上で求めた結果を適用すれば、

$$= -kD\hat{\mathbf{D}} = -k\mathbf{D}$$

これは、(a)で求めた $\mathbf{f}_1$ の式に一致している。

(c) 2体系の重心の定義式を時間微分することで、以下が得られる。

$$\dot{\mathbf{G}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}_2$$

授業の中で、孤立系の重心速度は定数ベクトルとなることが証明されている。つまり、ある時点（例えば $t=0$ ）の重心の速度を求めれば、その値は他の任意の時刻でも保たれている。

今の場合に与えられた初速を使って、

$$\dot{\mathbf{G}}(0) = \frac{m}{3m} \begin{pmatrix} 0 \\ 2V \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2m}{3m} \begin{pmatrix} 0 \\ -V \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2V \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -V \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

つまり、任意の時刻で、 $\dot{\mathbf{G}}(t) = 0$ が保たれていることになる。

このように速度ゼロとなるような位置 $\mathbf{G}(t)$ は、定数ベクトルでなければならない。

$$\text{一方、初期位置より、} \mathbf{G}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2L \end{pmatrix}_1 + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{だから、}$$

任意の時刻で $\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であって、重心は常に原点に静止していることがわかる。