

2体の運動エネルギーを重心と相対位置ベクトルによって表現する

各質点の運動エネルギーの定義式そのものを使って、(授業中の方法よりも原始的に)算出してみる.

$$\begin{cases} \mathbf{G} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{D} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{G} + \frac{m_2}{M} \mathbf{D} \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{G} - \frac{m_1}{M} \mathbf{D} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{G}} + \frac{m_2}{M} \dot{\mathbf{D}} \\ \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{G}} - \frac{m_1}{M} \dot{\mathbf{D}} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_1^2 = \dot{\mathbf{G}}^2 + \frac{2m_2}{M} \dot{\mathbf{G}} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \frac{m_2^2}{M^2} \dot{\mathbf{D}}^2 \\ \dot{\mathbf{r}}_2^2 = \dot{\mathbf{G}}^2 - \frac{2m_1}{M} \dot{\mathbf{G}} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \frac{m_1^2}{M^2} \dot{\mathbf{D}}^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 &= (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{G}}^2 + 2 \frac{m_1 m_2 - m_1 m_2}{M} \dot{\mathbf{G}} \cdot \dot{\mathbf{D}} + \frac{m_1 m_2 (m_2 + m_1)}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\mathbf{D}}^2 \\ &= M \dot{\mathbf{G}}^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{D}}^2 \end{aligned}$$

これを 1/2 倍すれば、求める運動エネルギーの総和になる.